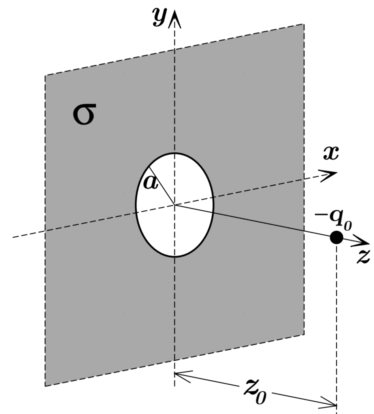
Nombre ______________________________ Carnet ____________________

1. [**10 *pts.***] La figura muestra el retazo central de una lámina cargada, muy extensa, con densidad de carga $\boldsymbol{\sigma}$, positiva y uniforme. La lámina ocupa todo el plano $\boldsymbol{x}$–$\boldsymbol{y}$, y presenta un orificio circular de radio $\boldsymbol{a}$.

(a) [**4 *pts.***] Determine el campo eléctrico $\boldsymbol{E_z}$, debido a la lámina entera cargada (sin el hueco). A partir de este campo, calcule el potencial eléctrico $\boldsymbol{V_1(z)}$ debido a la misma.

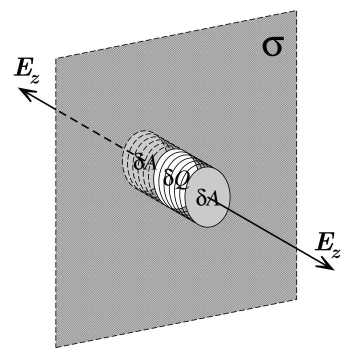


(b) [**4 *pts.***] Determine el potencial eléctrico $\boldsymbol{V_2(z)}$, debido a un disco cargado negativamente con densidad $\boldsymbol{-\sigma}$. A partir de este resultado, y el de la parte **(a)**, deduzca la expresión para el potencial $\boldsymbol{V_{tot}(z)}$ debido a la lámina infinita cargada con el orificio circular.

(c) [**2 *pts.***] Una carga negativa puntual $\boldsymbol{-q_0}$, de masa $\boldsymbol{m_0}$, se suelta en reposo desde la posición $\boldsymbol{z_0\,\widehat{u}_z}$, siendo $\boldsymbol{z_0 = \sqrt{3}\,a}$. Determine su velocidad cuando haya llegado al origen de coordenadas.

Respuestas:

(a) Aplicando la Ley de Gauss, tomamos un cilindro perpendicular al plano y de sección transversal $\boldsymbol{\delta A}$, el cual encierra una carga $\boldsymbol{\delta Q = \sigma\delta A}$, como se indica en la figura. El flujo eléctrico es positivo en cada una de las tapas circulares, y nulo en la superficie cilíndrica: $\boldsymbol{\epsilon_0\Phi_E = 2\epsilon_0 E_z\cancel{\delta A} = \sigma\cancel{\delta A}}$



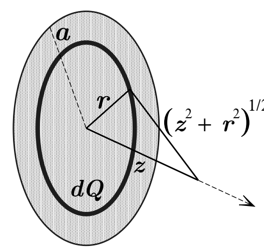
$$\Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{E_z = \sigma/2\epsilon_0}}$$

Siendo la relación entre el potencial y el campo eléctrico $\boldsymbol{\partial V/\partial z = -E_z}$, el potencial $\boldsymbol{V_1(z)}$ será una anti–derivada del campo:

$$\Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{V_1(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\,z + V_0\,,}}$$

donde $\boldsymbol{V_0}$ es un valor arbitrario (constante) del potencial.

(b) El disco de radio $\boldsymbol{a}$, cargado negativamente con densidad $\boldsymbol{-\sigma}$, se descompone en aros diferenciales de radio variable $\boldsymbol{r}$ y carga $\boldsymbol{dQ = -2\pi\,\sigma\,r dr}$, como indica la figura. La distancia de todos los puntos del aro a la posición sobre el eje $\boldsymbol{z}$ es la misma, y por lo tanto la contribución al potencial de este diferencial de carga está dada por la expresión coulombiana $\boldsymbol{4\pi\epsilon_0 dV = -2\pi\,\sigma\,r dr/\left(z^2+r^2\right)^{1/2}}$, donde el radio $\boldsymbol{r \in [0,a]}$. Integrando, se obtienen la expresiones deseadas para el potencial del disco y del plano con el hueco:



$$V_1(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\int_0^a \frac{r dr}{\left(z^2+r^2\right)^{1/2}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{V_1(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\left(z^2+a^2\right)^{1/2} - z\right]}}$$

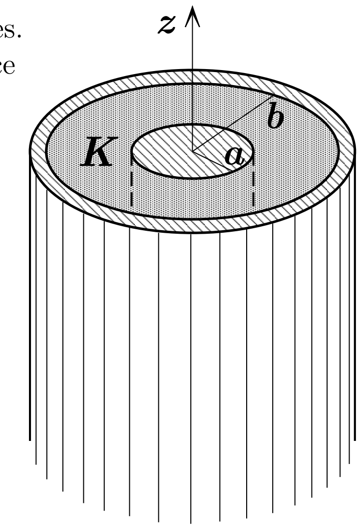
$$\Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{V_{tot}(z) = V_1(z) + V_2(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\,\left(z^2+a^2\right)^{1/2} + V_0}}$$

(c) El valor de la energía cinética de la carga, al llegar al origen de coordenadas, es opuesto a la variación de la energía potencial: $\boldsymbol{\Delta K = -\Delta U = q_0\Delta V_{tot} = (q_0\sigma/2\epsilon_0)\left(\sqrt{4a^2} - a\right) = (q_0\,\sigma\,a)/2\epsilon_0 = m_0 v^2/2}$.

Luego $$\Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{v = \sqrt{q_0\,\sigma\,a/m_0\,\epsilon_0}}}$$

2. [**12** $\boldsymbol{pts.}$] La figura muestra el corte de un cable coaxial <u>muy largo</u>, el cual consiste en un cilindro conductor macizo, de radio $\boldsymbol{a}$, rodeado de un cascarón cilíndrico delgado, de radio interno $\boldsymbol{b}$. El espacio entre ambos conductores está totalmente relleno de un material dieléctrico de constante $\boldsymbol{K}$. Se sabe que el conductor externo está conectado a tierra [$\boldsymbol{V_b \equiv 0}$], mientras que el conductor interno está a un potencial $\boldsymbol{V_a = V_0}$.

(a) [**2** $\boldsymbol{pts.}$] Calcule el campo eléctrico $\vec{\boldsymbol{E}}$ en el espacio entre ambos conductores. Suponga que la densidad lineal de carga $\boldsymbol{\lambda_a}$ del conductor macizo se conoce y es positiva, y que el campo es cero para $r > b$.



(b) [**4** $\boldsymbol{pts.}$] Calcule el potencial eléctrico $\boldsymbol{V(r)}$, en función de la distancia al eje común de los conductores. Determine la densidad lineal de carga, $\boldsymbol{\lambda_a}$, en función de la diferencia de potencial dada, $\boldsymbol{V_a - V_b = V_0}$. ¿Cuánto vale la capacitancia del cable coaxial, <u>por unidad de longitud</u>?

(c) [**3** $\boldsymbol{pts.}$] Calcule la energía eléctrica almacenada adentro del cable, <u>por unidad de longitud</u>.

(d) [**3** $\boldsymbol{pts.}$] Determine la carga inducida, <u>por unidad de longitud</u>, en la superficie interna del dieléctrico, $\boldsymbol{\lambda_{ind}}(r = a)$.

<u>**Respuestas**</u>:

(a) Calculamos el campo eléctrico $\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{0}}$ debido a las cargas libres, como si no existiera el dieléctrico. Aplicando la Ley de Gauss en simetría cilíndrica, se tiene:

#0) El campo eléctrico $\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{0}} = \boldsymbol{E_r}\,\widehat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}}$, siendo $\widehat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}}$ la dirección radial, perpendicular al eje $\boldsymbol{z}$;

#1) La superficie Gaussiana adecuada a la simetría del problema debe ser cilíndrica, de radio $\boldsymbol{r}$ y altura $\boldsymbol{h}$, es decir, $\boldsymbol{\Phi_{E} = 2\pi r \cancel{h} E_s = \lambda_a \cancel{h}}$;

#2) El campo eléctrico debido a cargas libres queda:

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{0}} = \frac{\boldsymbol{\lambda_a}}{\boldsymbol{2\pi\epsilon_0 r}}\,\widehat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}}}$$

#3) El efecto del dieléctrico será disminuir la magnitud del campo en un factor $\boldsymbol{K}$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\boldsymbol{\lambda_a}}{\boldsymbol{2\pi\epsilon_0 K r}}\,\widehat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}}}$$

(b) Integrando el campo eléctrico desde la referencia indicada $\boldsymbol{V_b \equiv 0}$, en $\boldsymbol{r = b}$, se tiene

$$V(r) = \cancel{V_b} - \int_b^r \frac{\lambda_a}{2\pi\epsilon_0 K}\,\frac{dr}{r} \qquad \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{V(r) = \frac{\lambda_a}{2\pi\epsilon_0 K}\,\ln\left(\frac{b}{r}\right)}}$$

Evaluando este potencial en la otra referencia indicada en $\boldsymbol{r = a}$, se obtiene la relación entre la densidad lineal de carga $\boldsymbol{\lambda_a \equiv \partial Q/\partial \ell}$ y el voltaje entre las placas del condensador cilíndrico $\boldsymbol{V_a = V_0}$. El factor que multiplica al voltaje $\boldsymbol{V_0}$ será la capacitancia por unidad de longitud que se pide, $\boldsymbol{\partial C/\partial \ell}$:

$$V_0 = \frac{\lambda_a}{2\pi\epsilon_0 K}\,\ln\left(\frac{b}{a}\right) \;\Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{\lambda_a \equiv \frac{\partial Q}{\partial \ell} = \frac{2\pi\epsilon_0 K}{\ln(b/a)}\,V_0}} \;\Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{\frac{\partial C}{\partial \ell} = \frac{2\pi\epsilon_0 K}{\ln(b/a)}}}$$

(c) Siendo la carga por unidad de longitud igual a $\boldsymbol{\lambda_a}$, la energía por unidad de longitud estará dada por $\boldsymbol{\partial U/\partial \ell = \frac{1}{2}\lambda_a V_0}$, es decir, $\boldsymbol{\partial U/\partial \ell = \frac{1}{2}(\partial C/\partial \ell) V_0^2}$

$$\Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{\frac{\partial U}{\partial \ell} = \frac{\pi\epsilon_0 K}{\ln(b/a)}\,V_0^2}}$$

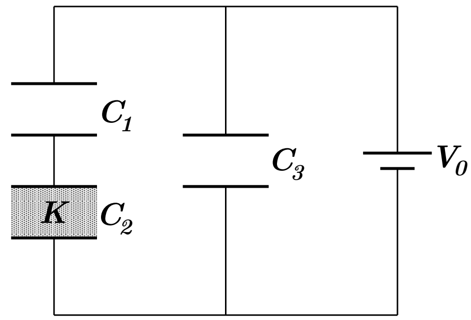
(d) La densidad lineal de carga inducida en la superficie interna del dieléctrico puede determinarse usando, de nuevo, la Ley de Gauss: en la proximidad de $\boldsymbol{r = a^+}$, el flujo del campo eléctrico se debe a dos densidades de carga, $\boldsymbol{\epsilon_0 \delta\Phi_{E}/\delta\ell = 2\pi a\,\epsilon_0\,E_r(r = a) = \lambda_a/K = \lambda_a + \lambda_{ind}}$

$$\Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{\lambda_{ind} = \lambda_a\left(\frac{1}{K} - 1\right)}}$$

3. [8 *pts.*] Los tres capacitores de la figura están <u>inicialmente vacíos</u>, es decir, no contienen dieléctrico alguno. Los valores de sus capacitancias son $C_1 = C$, $C_2 = 2C$, y $C_3 = 3C$, respectivamente. El voltaje de la batería de carga es V_0.

(a) [4 *pts.*] Determine las cargas respectivas Q_1, Q_2 y Q_3 de los capacitores <u>vacíos</u>, y la energía total acumulada en el sistema, U_{tot}.

(b) [4 *pts.*] A continuación, se introduce un dieléctrico de constante $K = 2$ en el capacitor C_2, manteniendo la batería conectada. Determine las nuevas cargas respectivas Q_1', Q_2' y Q_3' de los capacitores, y el cambio en la energía total acumulada, ΔU_{tot}, respecto a la del sistema original.



<u>**Respuestas**</u>:

(a) La carga total del circuito puede escribirse de dos formas: $Q_{tot} = Q_1 + Q_3 = Q_2 + Q_3 \implies \boxed{Q_2 = Q_1}$

Aparte, las dos ecuaciones de malla, pasando por el voltaje de la batería, arrojan el resultado para las cargas respectivas:

$$\frac{Q_1}{C} + \frac{Q_2}{2C} = \frac{Q_3}{3C} = V_0 \qquad \implies \boxed{Q_2 = Q_1 = \frac{2}{3}V_0C \;\Big|\; Q_3 = 3V_0C}$$

La energía total acumulada en el sistema de capacitores está dada por la suma $U_{tot} = \frac{1}{2}\sum_i Q_i V_i$, donde $V_1 = Q_1/C_1 = 2V_0/3$, $V_2 = Q_2/C_2 = V_0/3$ y $V_3 = V_0$. Sin embargo, la energía total del sistema puede calcularse directamente usando el valor de la carga total $U_{tot} = \frac{1}{2}Q_{tot}V_0$:

$$Q_{tot} = \left(3 + \frac{2}{3}\right)CV_0 = \frac{11}{3}V_0C \qquad \implies \boxed{U_{tot} = \frac{1}{2}Q_{tot}V_0 = \frac{11}{6}V_0^2C}$$

(b) Introducir el dieléctrico en el capacitor C_2 solo aumenta el valor de su capacitancia en un factor $K = 2$. La carga del capacitor C_3 no varía, ya que la batería permanece conectada: $\boxed{Q_3' = 3V_0C}$

La ecuación de malla para los capacitores C_1 y $C_2' = 2C_2$, siendo ambas cargas iguales, queda:

$$\frac{Q_1'}{C} + \frac{Q_2'}{4C} = V_0 \qquad \implies \boxed{Q_2' = Q_1' = \frac{4}{5}V_0C}$$

De estos resultados se tiene que la carga total del sistema aumenta:

$$\boxed{Q_{tot}' = \left(3 + \frac{4}{5}\right)CV_0 = \frac{19}{5}V_0C}$$

Producto de este cambio en el valor de la carga total, la energía total aumenta en el mismo factor, siendo entonces la variación de energía $\Delta U_{tot} = \frac{1}{2}\left(Q_{tot}' - Q_{tot}\right)V_0$:

$$\boxed{\Delta U_{tot} = \left[\frac{19}{10} - \frac{11}{6}\right]V_0^2C = \frac{1}{15}V_0^2C > 0}$$